

Bölüm 6: Lojik Denklemlerin Sadeleştirilmesi

A. Giriş: Karnough (karno) haritaları 1953 yılında **M. Karnough** tarafından dijital devrelerde kullanılmak üzere ortaya konmuştur. Bu yöntemle dijital devreleri en az kapı ile kurmak mümkündür.

Dijital devre denklemleri boolean teoremleriyle sadeleştirilebildiği gibi karnough haritası yöntemiyle de en az elemanlı hâle getirilebilmektedir.

Karno haritaları iyi anlaşılırsa, dijital devrelerle ilgili pek çok devre kısa sürede tasarlanabilir.

Karno yönteminde kutulardan oluşan diyagramlar kullanılır. Bu yöntem genellikle "çarpımların toplamı" şeklindeki lojik denklemlerin sadeleştirilmesinde kullanılır. Ancak, istenirse "toplamların çarpımı" şeklindeki lojik denklemlerin sadeleştirme işlemi de yapılabilir.

Karno haritası yöntemi en çok 6 değişkenli lojik denklemlerin sadeleştirilmesinde kullanılır.

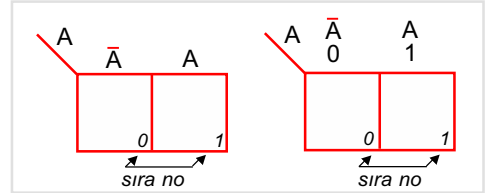
- 1 değişkenli denklemde: A
- 2 değişkenli denklemde: A, B
- 3 değişkenli denklemde, A, B, C
- 4 değişkenli denklemde, A, B, C, D
- 5 değişkenli denklemde, A, B, C, D, E
- 6 değişkenli denklemde, A, B, C, D, E, F girişleri bulunur.

B. Değişken Sayısına Göre Karno Haritasının Hazırlanması

Hazırlanacak karno haritasındaki kutu sayısı 2^n denklemiyle bulunur. (*n*: Değişken sayısı)

1. Tek Değişkenli Karno Haritası

Çizelge 6.1'de verilen tek değişkenli karno haritasında iki kutu vardır. A değişkeni 0 ve 1 değerlerini almaktadır. Kutucukların sağ alt köşelerinde bulunan eğik (*italik*) yazılmış rakamlar ise haritanın kutularının sıra numarasını göstermektedir.



Çizelge 6.1: Tek değişkenli karno haritasının iki şekilde gösterilmesi

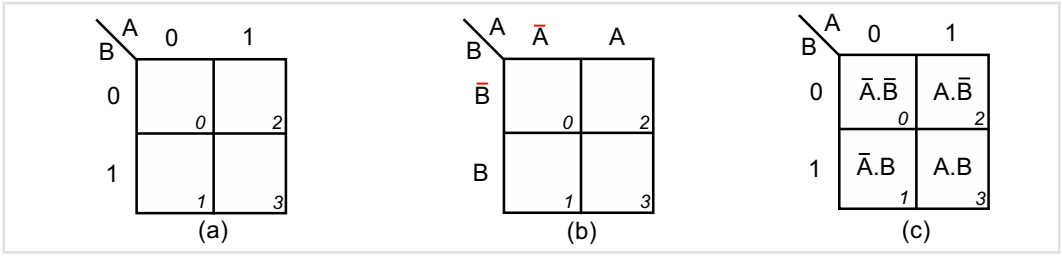
Not: Tek değişkenli karno haritası çok basit olduğundan devre sadeleştirme işlemlerinde kullanılmaz.

2. İki Değişkenli Karno Haritası

İki değişkenli karno haritası $2^n = 2^2 = 4$ kutucuktan oluşur. A ve B değişkenleri çizelge 6.2'de verildiği gibi kutucuklara yerleşir.

Karno haritasının üst sırasına A değişkeninin aldığı 0 ve 1 değerleri yazılır. Sol yandaki sütuna ise B değişkeninin aldığı 0 ve 1 değerleri yazılır.

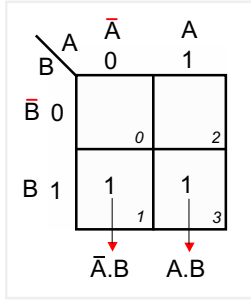
Çizelge 6.2-c'deki haritaya bakılacak olursa, A = 0, B = 0 durumu, bu iki değerlerin çakıştığı 0 numaralı kutucuğa yazılmıştır. A = 0, B = 1 durumu bu iki değerlerin çakıştığı 1 numaralı kutucuğa yazılır. A ve B'nin diğer ihtimalleri de aynı kurala göre 2 ve 3 numaralı kutucuklara yazılır.



Çizelge 6.2: İki değişkenli karno haritasının üç farklı şekilde gösterilmesi

Örnek: $Y = \bar{A}.B + A.B$ ifadesini karno haritasına yerleştiriniz.

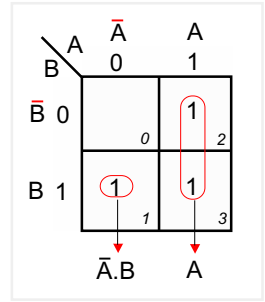
Çözüm: $\bar{A}.B$ değeri haritaya yazılırken $\bar{A} = 0$ ve $B = 1$ olan kutu seçilir. $A.B$ değeri yazılırken ise $A = 1$ ve $B = 1$ olan kutu seçilir.



Çizelge 6.3

Örnek: $Y = A + \bar{A}.B$ ifadesini karno haritasına yerleştiriniz.

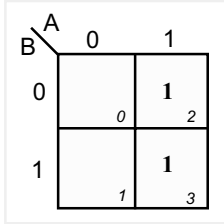
Çözüm: Bu denklemde A 'yı haritaya aktarırken A 'nın 1 olduğu tüm kutulara 1 yazılır. $\bar{A}.B$ değeri yazılırken ise $\bar{A} = 0$ ve $B = 1$ olan kutuya 1 yazılır.



Çizelge 6.4

Örnek: $Y = A.B + A.\bar{B}$ ifadesini karno haritasına yerleştiriniz.

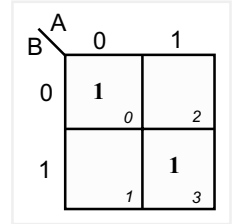
Çözüm:



Çizelge 6.5

Örnek: $Y = \bar{A}.B + A.B$ ifadesini karno haritasına yerleştiriniz.

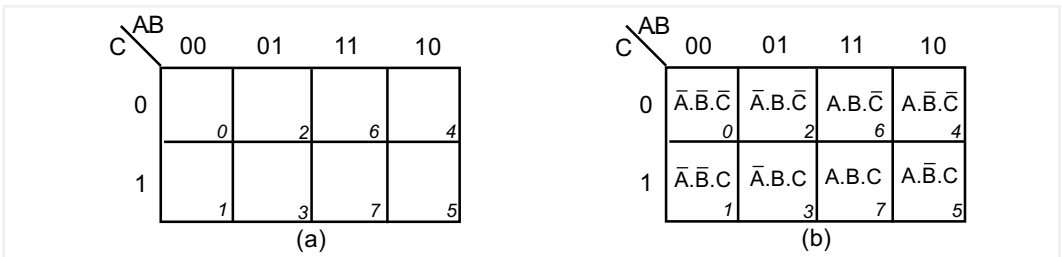
Çözüm:



Çizelge 6.6

3. Üç Değişkenli Karno Haritası

Üç değişkenli karno haritası $2^n = 2^3 = 8$ kutucuktan oluşur. A , B ve C değişkenleri çizelge 6.7'de verildiği gibi kutulara yerleşir.



Çizelge 6.7: Üç değişkenli karno haritasının iki farklı şekilde gösterilmesi

Örnek: $Y = \bar{A}.B.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C$ ifadesini karno haritasına yerleştiriniz.

Çözüm: Çizelge 6.8'de görüldüğü gibi,
 $Y = \bar{A}.B.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C$ denklemi 1, 3 ve 5. kutulara yerleşmektedir.

Örnek: $Y = A + \bar{A}.B.C + B.\bar{C}$ ifadesini karno haritasına yerleştiriniz.

Çözüm: Çizelge 6.9'da verilen haritada görüldüğü gibi,
 *A'nın 1 olduğu kutulara 1 yazılır.
 * $\bar{A}.B.C$ yazılırken $\bar{A} = 0, B = 1, C = 1$ olan kutulara 1 yazılır.
 * $B.\bar{C}$ yazılırken ise $B = 1$ ve $\bar{C} = 0$ olan kutulara 1 yazılır.

Örnek: $Y = \bar{A}.B.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.B.C + A.\bar{B}.C$ ifadesini karno haritasına yerleştiriniz.

Çözüm: Çizelge 6.10'da görüldüğü gibi,
 $Y = \bar{A}.B.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.B.C + A.\bar{B}.C$ denklemi 0, 2, 5 ve 7. kutulara yerleşmektedir.

4. Dört Değişkenli Karno Haritası

Dört değişkenli karno haritası $2^n = 2^4 = 16$ kutucuktan oluşur. A, B, C ve D değişkenleri şekil 6.4'te verildiği gibi kutulara yerleşir.

		A.B			
		00	01	11	10
C	0				
	1	1	1		1
		0	2	6	4
		1	3	7	5

Çizelge 6.8

		A.B			
		00	01	11	10
C	0		1	1	1
	1	1	1	1	
		0	2	6	4
		1	3	7	5
		$B.\bar{C}$	$\bar{A}.B.C$	A	

Çizelge 6.9

		A.B			
		00	01	11	10
C	0	1	1		
	1			1	1
		0	2	6	4
		1	3	7	5

Çizelge 6.10

		A.B			
		00	01	11	10
(a)	00				
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10
		0	4	12	8

		A.B			
		00	01	11	10
(b)	00	$\bar{A}.B.C.\bar{D}$	$\bar{A}.B.C.D$	$A.B.C.\bar{D}$	$A.B.C.D$
	01	$\bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{A}.B.\bar{C}.D$	$A.B.\bar{C}.\bar{D}$	$A.B.\bar{C}.D$
	11	$\bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}$	$\bar{A}.\bar{B}.C.D$	$A.\bar{B}.C.\bar{D}$	$A.\bar{B}.C.D$
	10	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D$	$A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$	$A.\bar{B}.\bar{C}.D$
		0	4	12	8
		1	5	13	9
		3	7	15	11
		2	6	14	10

Çizelge 6.11: Dört değişkenli karno haritasının iki farklı şekilde gösterilmesi

Örnek:

$Y = A.B + \bar{A}.B.C.D + B.C$ ifadesini karno haritasına yerleştiriniz.

Çözüm:

$Y = A.B + \bar{A}.B.C.D + B.C$ denklemi, karno haritasına yanda görüldüğü gibi yerleşmektedir.

C.D \ A.B		A.B			
		00	01	11	10
A.B.C.D	00	0	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

Çizelge 6.12

5. Beş Değişkenli Karno Haritası

Beş değişkenli karno haritası

$$2^n = 2^5 = 32$$

kutucuktan oluşur. A, B, C, D ve E değişkenleri çizelge 6.13'te verildiği gibi kutulara yerleşir. (Beş değişkenli karno haritası az kullanılır.)

DE \ ABC		ABC							
		000	001	011	010	110	111	101	100
DE	00	0	1	3	2	6	7	5	4
	01	8	9	11	10	14	15	13	12
	11	24	25	27	26	30	31	29	28
	10	16	17	18	19	22	23	21	20

Çizelge 6.13: Beş değişkenli karno haritası

6. Altı Değişkenli Karno Haritası

Altı değişkenli karno haritası $2^n = 2^6 = 64$

kutucuktan oluşur. A, B, C, D, E ve F değişkenlerinin yerleşimi çizelge 6.14'te verildiği olur. (Altı değişkenli karno haritası az kullanılır.)

DE \ AB		$\bar{C} = 0$				$C = 1$			
		00	01	11	10	10	11	01	00
F = 0	00								
	01								
	11								
	10								
F = 1	10								
	11								
	01								
	00								

Çizelge 6.14

C. İki Değişkenli

Denklemin

Doğruluk Tablosu ve Karno Haritası

Çizelge 6.15'te iki değişkenli bir doğruluk tablosu görülmektedir.

Çizelgede A ve B giriş, Y çıkıştır. Doğruluk çizelgesine uygun karno haritası da çizelgenin yanında görülmektedir.

1. İki Değişkenli Doğruluk Çizelgesinin Karno Haritasına Geçirilmesi

Verilen doğruluk çizelgesinde çıkışın 1 olduğu kademeler karno haritasında uygun yere konulur.

Örnek: Çizelge 6.16'da verilen doğruluk çizelgesini karno haritası üzerinde gösteriniz.

Çözüm: Çizelge 6.16'da verilen doğruluk çizelgesinin karno haritasına aktarılışı çizelge 6.17'de gösterilmiştir.

Örnek: Çizelge 6.18'de verilen üç değişkenli doğruluk çizelgesini karno haritasına aktarınız.

Çözüm: Çizelge 6.18'de verilen doğruluk çizelgesinin karno haritasına aktarılışı çizelge 6.19'da gösterilmiştir.

D. Karno Haritaları Kullanılarak Lojik Denklemlerin Sadeleştirilmesi

Lojik denklemler karno haritasıyla sadeleştirilirken haritadaki 1'ler uygun bileşkelere alındıktan sonra bu değerler toplanıp sonuç bulunur.

1. İki Değişkenli Lojik Denklemlerin Karno Haritasıyla Sadeleştirilmesi:

Bu yöntemde şu kurallar geçerlidir:

I. İçinde 1 olan kutucuklar *birli* ya da *ikili* bileşke oluşturabilir.

II. Bileşke oluşturmanın amacı en sade devreyi elde etmektir. Buna göre bir kutucuk birden çok bileşkeye dâhil edilebilir.

III. Bileşkelere ancak birbirine komşu kutucuklar arasında yapılabilir. Çapraz bileşke oluşturulamaz.

Kutuno	Girişler		Çıkış
	A	B	
0	0	0	
1	0	1	
2	1	0	
3	1	1	

	A	
	0	1
B	0	
	1	

Çizelge 6.15: İki değişkenli doğruluk çizelgesi ve karno haritası

Kutuno	Girişler		Çıkış
	A	B	
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1

Çizelge 6.16

	A	
	0	1
B	0	
	1	

Çizelge 6.17

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Çizelge 6.18

	AB			
	00	01	11	10
C	0			
	1			

Çizelge 6.19

Yukarıda belirtilen kurallara göre bileşkeler oluşturulduktan sonra en uygun denklem yazılır.

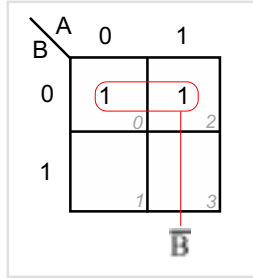
Bileşke sonuçları değerlendirilirken, bileşkeye dâhil olan değişkenlerin durum değiştirip değiştirmedikleri kontrol edilir. Yani bileşke içindeki kutucuklarda bulunan değişkenlerden durum değiştirenler varsa bunlar dikkate alınmaz.

Örnek:

$$Y = \bar{A}.\bar{B} + A.B$$

şeklindeki lojik denklemi karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm: $Y = \bar{B}$



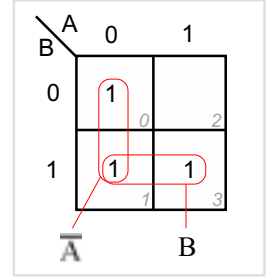
Çizelge 6.20

Örnek:

$$Y = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B + A.B$$

şeklindeki lojik denklemi karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm: $Y = \bar{A} + B$



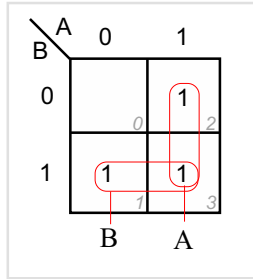
Çizelge 6.21

Örnek:

$$Y = A + \bar{A}.B$$

şeklindeki lojik denklemi karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm: $Y = A + B$



Çizelge 6.22

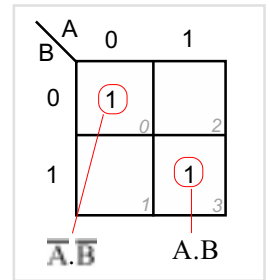
Örnek:

$$Y = \bar{A}.\bar{B} + A.B$$

şeklindeki lojik denklemi karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm: $Y = \bar{A}.\bar{B} + A.B$

Not: Denklemde sadeleşme olmamıştır.



Çizelge 6.23

2. Üç Değişkenli Lojik Denklemlerin Karno Haritasıyla Sadeleştirilmesi:

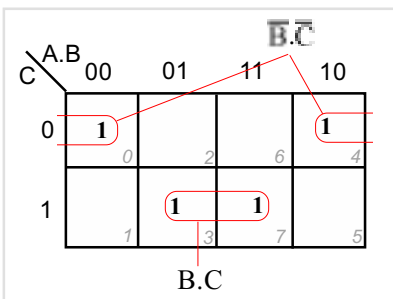
Bu yöntemde şu kurallar geçerlidir:

- I. Bitişik dört kutucukdaki 1'ler tek bileşke olarak gruplanır.
- II. Bitişik iki kutucukdaki 1'ler iki bileşke olarak gruplanır.
- III. Her kutucuk üç değişkenli bileşke olarak ifade içerir.
- IV. Kenarlarda bulunan 1'ler, harita silindir gibi kabul edilerek diğer köşede bulunan 1'lerle ikili ya da dörtlü bileşke oluşturabilir.

Örnek: $Y = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + A.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.B.C$

şeklindeki lojik denklemi karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm: $Y = \bar{B}.\bar{C} + B.C$

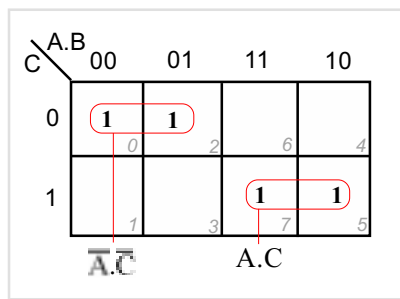


Çizelge 6.24

Örnek: $Y = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + A.B.C + A.B.C$

şeklindeki lojik denklemi karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm: $Y = \bar{A}.\bar{C} + A.C$

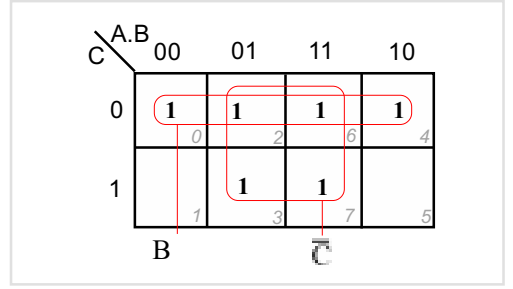


Çizelge 6.25

Örnek:

$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}B.C + A.B.C$ şeklindeki lojik denklemi karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm: $Y = B + \bar{C}$

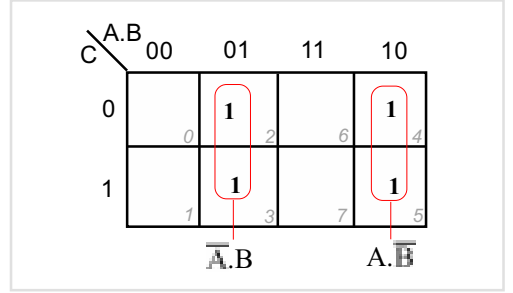


Çizelge 6.26

Örnek:

$Y = \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.C$ şeklindeki lojik denklemi karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm: $Y = \bar{A}.B + A.\bar{B}$



Çizelge 6.27

3. Dört Değişkenli Lojik Denklemlerin Karno Haritasıyla Sadeleştirilmesi:

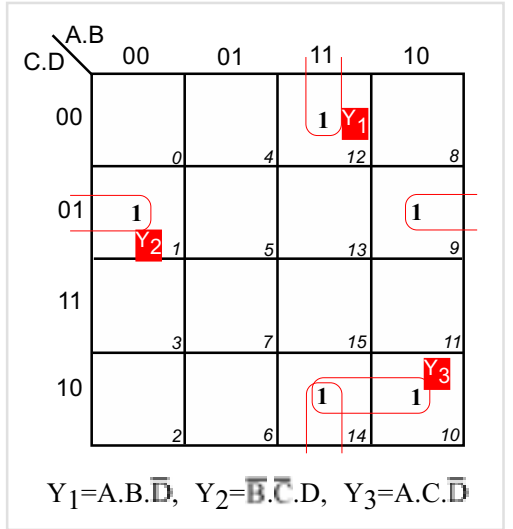
Bu yöntemde şu kurallar geçerlidir:

- I. Bitişik 8 kutucukdaki 1'ler tek bileşke olarak gruplanır.
- II. Bitişik dört kutucukdaki 1'ler iki değişkenli bileşke olarak gruplanır.
- III. Bitişik iki kutucukdaki 1'ler üç değişkenli bileşke olarak gruplanır.
- IV. Her kutucuk dört değişkenli bileşke olarak ifade edilir.
- V. Kenarlarda bulunan 1'ler harita, "küre" gibi kabul edilerek diğer köşede bulunan 1'lerle ikili ya da dörtlü bileşke oluşturabilir.

Örnek:

$Y = \bar{A}.B.\bar{C}.D + A.B.\bar{C}.D + \bar{B}.\bar{C}.D + A.B.C.\bar{D} + \bar{B}.C.\bar{D}$ şeklindeki lojik denklemi karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

Çözüm: $Y = A.B.\bar{D} + \bar{B}.\bar{C}.D + A.C.\bar{D}$



Çizelge 6.28

E. Karnough Haritasıyla Lojik Devre Tasarımı

Lojik kapılar kullanılarak çeşitli endüstriyel devreler üretmek mümkündür.

Lojik kapılarla devre tasarımı yapılırken şu kurallara uyulur:

- Yapılmak istenen işin tüm ayrıntıları belirlenir.
- Yapılmak istenen işe göre doğruluk tablosu hazırlanır.
- Doğruluk tablosunun çıkışının 1 olduğu kademelerin doğruluk tablosu yazılır.
- Doğruluk tablosundan elde edilen lojik denklem boolean ya da karno haritası teoremlerinden yararlanılarak sadeleştirilir.
- Sadeleşmiş denklemin lojik kapılı devresi çizildikten sonra TTL ya da CMOS entegrelerle üretim yapılır.

Örnek: Üç anahtarlı girişin söz konusu olduğu dijital bir devrede anahtarlardan ikisinin ya da üçünün '1' konumunda olması durumunda ledin (alıcının) çalışması istenmektedir.

- a. Yapılmak istenilen işlemin doğruluk çizelgesini hazırlayınız.
- b. Doğruluk çizelgesine göre lojik denklemi yazınız.
- c. Lojik denklemin kapılı devresini çiziniz.
- d. Lojik denklemi üç değişkenli karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.
- e. Karno haritasından elde edilen denklemin lojik kapılı devresini çiziniz.

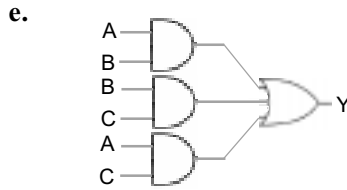
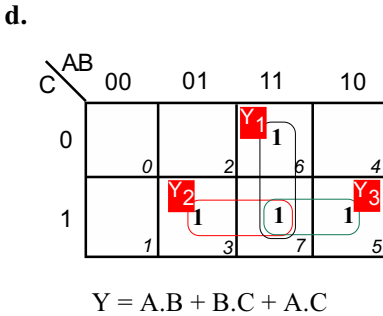
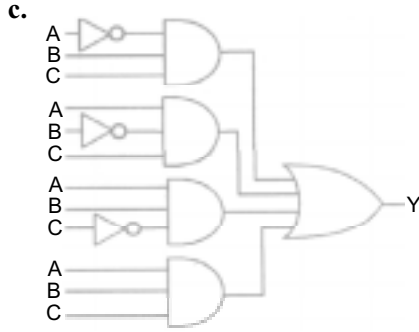
Çözüm:

a.

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$= \bar{A}.B.C$
 $= A.\bar{B}.C$
 $= A.B.\bar{C}$
 $= A.B.C$

b. $Y = \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C} + A.B.C$



Açıklama: Verilen örnekte görüldüğü gibi 7 adet lojik kapı ile kurulabilen devre karno haritası yöntemiyle sadeleştirilince 4 lojik kapı ile kurulabilmektedir.

Örnek: 3 adet alıcı (lâmba, motor, röle, led vb.) şu şekilde çalışacaktır.

- A, B, C girişlerinden üçü '0' ya da '1' olduğunda 1. motor çalışacaktır.
- Girişlerden bir tanesi '1' olduğunda 2. motor, girişlerden iki tanesi '1' olduğunda hem 2. motor hem de 3. motor çalışacaktır.

a. Yapılmak istenilen işlemin doğruluk tablosunu hazırlayınız.

b. Doğruluk tablosuna göre lojik denklemi yazınız.

c. Lojik denklemin kapılı devresini çiziniz.

Örnek: Üç anahtarlı girişin söz konusu olduğu dijital bir devrede 2,3,4 ve 5. kademelerde çıkıştaki alıcının çalışması istenmektedir.

a. Yapılmak istenilen işlemin doğruluk tablosunu hazırlayınız.

b. Doğruluk tablosuna göre lojik denklemi yazınız.

c. Lojik denklemin kapılı devresini çiziniz.

d. Lojik denklemi üç değişkenli karno haritası kullanarak sadeleştiriniz.

e. Karno haritasından elde edilen denklemin lojik kapılı devresini çiziniz.

Çözüm:

a.

Kutu no	Girişler			Çıkış
	A	B	C	
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

b. $Y = \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.\bar{B}.C$

Çözüm:

a.

Girişler			Çıkışlar		
A	B	C	1. mot	2. mot	3. mot
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

b. 1. motorun lojik denklemi:

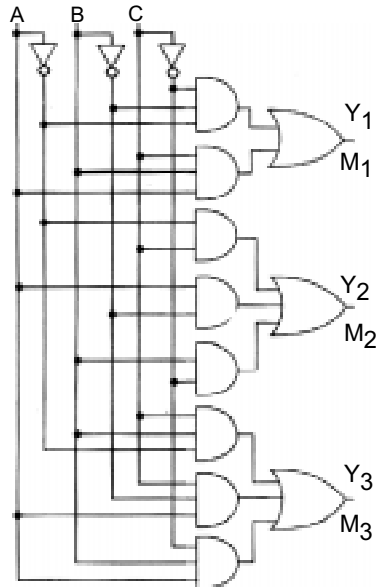
$$Y_1 = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + A.B.C$$

2. motorun lojik denklemi:

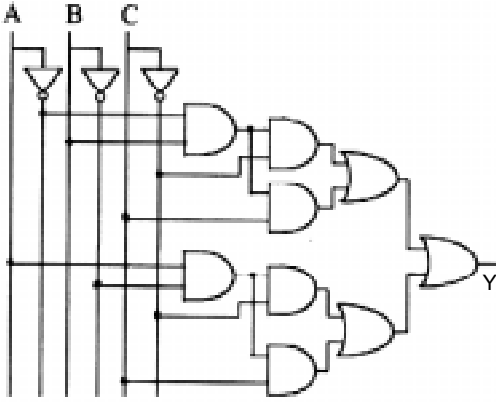
$$Y_2 = \underbrace{\bar{A}.B.C}_{I} + \underbrace{\bar{A}.\bar{B}.C}_{II} + \underbrace{\bar{A}.B.C}_{I} + \underbrace{A.\bar{B}.\bar{C}}_{III} + \underbrace{A.\bar{B}.C}_{III} + \underbrace{A.B.\bar{C}}_{II}$$
$$= \bar{A}.C.(B+B) + B.\bar{C}.(A+A) + A.\bar{B}.(C+C)$$
$$= \bar{A}.C + B.\bar{C} + A.\bar{B}$$

$$Y_3 = \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C}$$

c.



c.



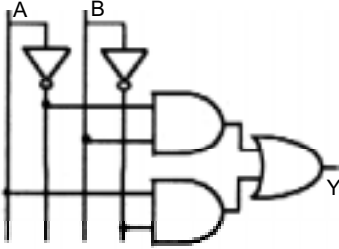
d.

AB \ C	00	01	11	10
0	0	1	2	6
1	1	3	7	5

$$Y = Y_1 + Y_2$$

$$Y = \overline{A}.B + A.\overline{B}$$

e.



Açıklama: 12 adet lojik kapı ile kurulabilen devre karno haritası yöntemiyle sadeleştirilince 5 lojik kapı ile kurulabilmektedir.

Sorular

1. $Y = \overline{A}.B + \overline{A}.\overline{B}$ ifadesini karno haritası yöntemini kullanarak sadeleştiriniz.
2. $Y = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C$ ifadesini karno haritası yöntemini kullanarak sadeleştiriniz.
3. $Y = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + A.B.C$ ifadesini karno haritası yöntemini kullanarak sadeleştiriniz. Sadeleşmiş denklemin lojik kapılı devresini çiziniz.